

Paragraphe - groupe orthog. $O(P)$, spz. orth. $O^+(P)$

Cadre : Plan vectoriel euclidien, paufers dir. d'un plan affine P .

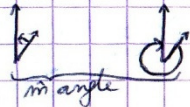
I. ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

A. Définition, premières propriétés.

Def 1: $(\vec{u}, \vec{v})$, angle orienté d'un couple de vect. unitaires, est la classe d'équivalence de $(\vec{u}, \vec{v})$ modulo l'action de $O^+(P)$.

L'angle or. de deux vect. qui s'op. est celui obtenu en les tournant l'angle or. de deux dir. orientées est celui de leurs vect. dir.

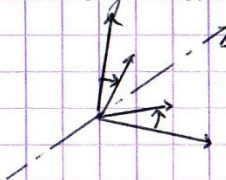
Notations:
flèche d'vect. et d'arc



Prop 1: Relation de Chasles. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{P} \setminus \{0\}$,
 $\bullet (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$
 $\bullet (\vec{u}, \vec{u}) = 0$
 $\bullet (\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$

Prop 2: Action d'une réflexion (s)

Toute isométrie vectorielle indirecte (réflexion) transforme tout angle orienté en son opposé.



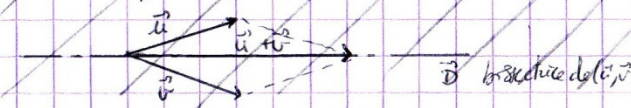
B. Angles droits, angle plat, bissectrice

Prop 3 Def 2: Il existe un unique angle α tq $\alpha = 0$, c'est l'angle plat, que l'on mesure π et qui est égal à $(\vec{u}, -\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \neq 0$.

Prop 3: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{P} \setminus \{0\}$, $(\vec{u}, -\vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

Prop 8 Def 3: Il existe deux angles opposés D_1 et D_2 , appelés angles droits tq $2D_1 = 2D_2 = \pi$, ce sont les angles formés par des vecteurs non nuls colinéaires.

th 8 Def 4: Soient $\vec{u}, \vec{v}$ unitaires. Il existe exactement deux vecteurs unitaires $\vec{w}$ tels que $(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$. Ces deux vect. sont opposés et colinéaires à $\vec{u} \times \vec{v}$; ils déterminent une dir. vectorielle appelée bissectrice de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.



C. Notion des angles orientés de vecteurs.

On suppose à présent P orienté par le choix d'une base directe, ce qui m'était pas mesurable jusqu'à présent.

Def 4: Dans P orienté, une mesure en radians de $(\vec{u}, \vec{v})$ est tout $\theta \in \mathbb{R}$ tq la matrice dans une BND de la rotation qui transforme $\vec{u}$ en $\vec{v}$ par $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. L'ensemble est un élt de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ appl. la mesure de l'angle. La mesure principale d'un angle est son unique mesure $\in]-\pi, +\pi]$. L'angle est dit plat si sa mesure principale est positive.

Ex: L'angle plat a pour mes. $\pi [2\pi]$, et les angles de $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

th 1: La mesure induit un isomorphisme du groupe Ab des angles orientés de vecteurs sur $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$.

Notation: On note $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta [2\pi]$.

Def 5: Le cosinus de $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cos d'une mesure par une arcuatur. qd, on le note $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ (En revanche, le sinus n'est défini que de P orienté)

Def 6: Si $(\vec{u}, \vec{v})$ BND de $\vec{P}$ (orienté), on appelle angle plat de $\vec{u} \neq \vec{0}$ l'angle $(\vec{u}, \vec{u})$.

Application: $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 [2\pi]$
 $\Rightarrow \vec{u} = \|\vec{u}\| (\cos 0 \vec{e}_1 + \sin 0 \vec{e}_2)$

Prop 4: produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$
 déterminant $|\vec{u}, \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \varphi$, $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi [2\pi]$
 par l'arcuatur. d'une à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
 On a donc $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta [2\pi] \Leftrightarrow \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v} / \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
 (caract. par sin et cos) $\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = |\vec{u}, \vec{v}| / \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \end{array} \right.$

II. ANGLES ORIENTÉS DE DROITES.

(Il s'agit d'angles de droites vectorielles)

Def 7: $(\vec{D}, \vec{D}')$ est la classe d'équivalence de $(\vec{D}, \vec{D}')$ modulo l'action de $O^+(P)$.

Prop 5: Relation de Chasles

$\forall \vec{D}, \vec{D}', \vec{D}'' \in \vec{P}$, $(\vec{D}, \vec{D}') + (\vec{D}', \vec{D}'') = (\vec{D}, \vec{D}'')$.

Def 8: Notion. Une mesure en radians de $(\vec{D}, \vec{D}')$ est une mesure de l'angle or. de deux vect. dir. de ces drs. Elles forment un élt de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ appl. la mesure de $(\vec{D}, \vec{D}')$. La mesure principale de $(\vec{D}, \vec{D}')$ est son unique mesure $\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

th 2: la mesure induit un isomorphisme du groupe Ab des angles orientés de drs. sur $(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, +)$. (2)

Notation: $(\vec{D}, \vec{D}') = \theta [\pi]$.

Prop 6: Utiliser conjointement d'angles $[2\pi]$ et d'angles $[\pi]$.

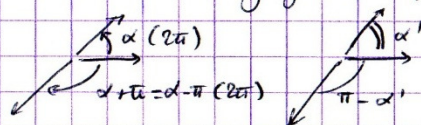
$\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires.

$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha [\pi]$ et $\text{sgn}(\sin(\vec{u}, \vec{v})) = \text{sgn} \alpha$

$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + \pi [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha [\pi]$ et $\text{sgn}(\sin(\vec{u}, \vec{v})) = -\text{sgn} \alpha$

III. ANGLES GÉOMÉTRIQUES.

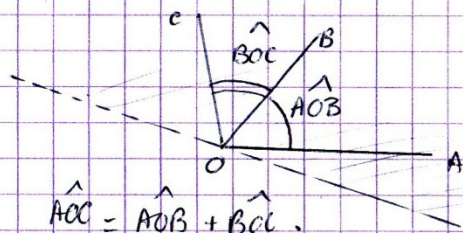
Def 1: L'angle géométrique de $(\vec{u}, \vec{v})$ unitaires est la classe de ce couple modulo $2\pi(\mathbb{R}) \neq \text{entier}$. On définit de m l'angle géo de vect $\vec{u}, \vec{v}$ de directions.



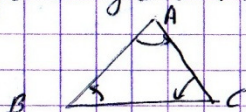
angle or de vect. angles géom. de vect
les de relat de Chasles en général, mais:

Prop 7: Dans $\mathbb{P}$ orienté, si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ sont des couples libres de $\vec{u}$ sans de l'angle nul, et si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont contenus de un même demi-plan rectaire fermé, alors en angles géométriques:

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) + (\vec{u}_2, \vec{u}_3).$$



Application: La somme des angles orientés d'un triangle est égale à π modulo 2π .
 $(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi \pmod{2\pi}$
 La somme des angles géométriques d'un triangle est égale à π .

IV. NOTES

- (1) Les réflexions sont les isométries rectailes indirectes. Sur les isométries rectailes directes, on voit que l'angle est invariant, car c'est sa def.
- (2) Il y a 2 tels isomorphismes, déterminés par le choix de l'orientation du plan.